ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

1. Μια τεχνική εταιρεία που πρέπει να παραδώσει ένα μεγάλο έργο μέσα στα επόμενα δύο χρόνια, χρειάζεται 200 επιπλέον φορτηγά. Τα φορτηγά αυτά, είτε θα τα αγοράσει πληρώνοντας 140 χρηματικές μονάδες ανά φορτηγό, είτε θα τα νοικιάσει με ετήσιο κόστος 80 χ.μ. ανά φορτηγό. Τα χρήματα για την αγορά των φορτηγών θα πρέπει να καταβληθούν με την έναρξη του έργου αλλά αυτά της ενοικίασής τους σε δύο δόσεις (στην αρχή της κάθε χρονιάς). Ξεκινώντας το έργο, η εταιρεία έχει στη διάθεσή της για αγορά και/ή ενοικίαση φορτηγών ένα ποσό ύψους 8000 χ.μ. Επιπλέον, μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δυνατότητα δανεισμού που εξασφάλισε: ετήσιο δάνειο μέχρις 20000 χ.μ. με τόκο 16% αλλά με την υποχρέωση αποπληρωμής του στο τέλος της χρονιάς. Τα ετήσια κέρδη για την εταιρεία από το κάθε φορτηγό, εκτιμήθηκαν στις 120 χ.μ. και χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στη διαδικασία ενοικίασης φορτηγών και εξόφλησης του δανείου που πάρθηκε. Να υποδειχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του τρόπου προμήθειας των φορτηγών, ο οποίος να ελαχιστοποιεί το συνολικό τους κόστος.

2. Ο υπεύθυνος της επιτροπής αγώνα κατά της ρύπανσης μιας λίμνης έχει για κύριο έργο του τον έλεγχο του περιορισμού των τοξικών ουσιών που ρυπαίνουν τη λίμνη, στα ανεκτά όρια που προβλέπει ο νομοθέτης. Τρεις βιομηχανικές μονάδες πετούν τα απόβλητά τους στη λίμνη. Αυτά τα απόβλητα περιέχουν χημικές ουσίες ιδιαίτερα επικίνδυνες, όπως άλατα μόλυβδου (Pb), υδραργύρου (Hg) και μαγγανίου (Mn). Για τον περιορισμό της ρύπανσης στα ανεκτά επίπεδα, διατίθενται δύο είδη προϊόντων (ακίνδυνα για την υγεία), το ένα βασισμένο σε θειικά άλατα, το δεύτερο βασισμένο σε νιτρικά άλατα. Τα προϊόντα αυτά αντιδρούν με τις παραπάνω τοξικές ουσίες παράγοντας τελείως ακίνδυνα ιζήματα. Το πρόβλημα που θέτει η επιτροπή αγώνα, επικεντρώνεται στον υπολογισμό εκείνου του συνδυασμού θειικών και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιεί το κόστος προστασίας ενώ παράλληλα, επιτρέπει την ικανοποίηση των οικολογικών περιορισμών. Ο υπεύθυνος της επιτροπής που αντιμετωπίζει το πρόβλημα διαθέτει τα εξής παρακάτω στοιχεία:

α) Την ποσότητα αποβλήτων και την περιεκτικότητα τους σε τοξικές ουσίες για κάθε βιομηχανία που δίνονται στον πίνακα:

	Όγκος και περιεκτικότητα αποβλήτων			
	Όγκος Αποβλήτων (m^3)	*Συγκέντρωση (g/m^3)*		
Βιομηχανική Μονάδα		Pb	Hg	*Mn*
1	1000	1.00	2.50	*0.70*
2	3000	0.50	0.50	*1.00*
3	1200	1.25	1.00	0.50

β) Την ικανότητα εξουδετέρωσης των αλάτων:

- 1 βαρέλι θειικού άλατος εξουδετερώνει 3 κιλά αλάτων μολύβδου, 2 κιλά αλάτων υδραργύρου και 20 κιλά αλάτων μαγγανίου,
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος εξουδετερώνει 5 κιλά αλάτων μολύβδου, 12.5 κιλά αλάτων υδραργύρου και 3 κιλά αλάτων μαγγανίου.

γ) Τους οικολογικοί περιορισμούς:

Οι μέγιστες ποσότητες τοξικών ουσιών στα νερά, που επιτρέπει η νομοθεσία μετά την εφαρμογή μέτρων κατά της μόλυνσης, είναι:

- άλας μολύβδου: 1 κιλό
- άλας υδραργύρου: 0.2 κιλά
- άλας μαγγανίου: 1.3 κιλά

Υποτίθεται ότι η φύση καταστρέφει από μόνη της καθημερινά αυτές τις ποσότητες, δεν μπορεί όμως να καταστρέψει περισσότερο.

δ) Το κόστος προϊόντων εξουδετέρωσης

- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 χρηματικές μονάδες (χ.μ)
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 (χ.μ)

Το πρόβλημα της επιτροπής συνίσταται στην εναλλακτική επιλογή θειικών ή/ και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιούν το κόστος προστασίας της λίμνης

3. Από μια εταιρεία κατασκευής χαρτιού ζητήθηκε η παραγωγή χαρτιού σε ρολό μήκους 150 cm και πλάτους 1.5, 2.5 και 3.5 cm. Τα μηχανήματα όμως της εταιρεία μπορούν να παράγουν ρολά χαρτιού οποιουδήποτε μήκους αλλά πλάτους αποκλειστικά 10 cm και συνεπώς η εταιρεία πρέπει να κόψει τα παραγόμενα ρολά στις ζητούμενες προδιαγραφές (πλάτους).

Α. Αν οι ελάχιστες απαιτήσεις της αγοράς ανέρχονται σε 1000 ρολά πλάτους 1.5 cm, 2000 ρολά πλάτους 2.5 cm και 4000 ρολά πλάτους 3.5 cm υποδείξτε ένα π.γ.π για την εύρεση του συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε οι απώλειες σε χαρτί της εταιρείας να είναι οι ελάχιστες δυνατές

B. Τι αλλάζει αν το ενδιαφέρον της εταιρείας επικεντρωθεί μόνο στην εύρεση του ελάχιστου δυνατού συνολικού αριθμού ρολών χάρτου που πρέπει να παραχθεί (κάτω από τις ίδιες απαιτήσεις της αγοράς); Δώστε το νέο π.γ.π

4. Ο διευθυντής παραγωγής ενός εργοστασίου χημικών προσπαθεί να φτιάξει το πρόγραμμα απασχόλησης του προσωπικού του. Κάθε μέρα περιλαμβάνει τρεις βάρδιες (00:01-08:00 (νυχτερινή), 08:01-16:00 (πρωινή), 16:01-24:00 (απογεματινή)). Το εργοστάσιο λειτουργεί σε 24ωρη βάση και ο ελάχιστος αριθμός εργατών που απαιτείται σε κάθε βάρδια για μια οποιαδήποτε εβδομάδα δίνεται στον επόμενο πίνακα:

	ΔΕΥΤ	ΤΡΙΤ	ΤΕΤ	ΠΕΜ	ΠΑΡ	ΣΑΒ	ΚΥΡ
ΝΥΚΤΕΡΙΝΗ	5	3	2	4	3	2	2
ΠΡΩΙΝΗ	7	8	9	5	7	2	5
ΑΠΟΓΕΥΜΑΤΙΝΗ	9	10	10	7	11	2	2

Το πλάνο εργασίας των υπαλλήλων πρέπει να πληρεί τους ακόλουθους όρους: (1) κάθε υπάλληλος εργάζεται σε συγκεκριμένη βάρδια (είτε νυχτερινή είτε πρωινή είτε απογευματινή) και παραμένει σε αυτή κάθε μέρα που εργάζεται. (2) Κάθε υπάλληλος δουλεύει τέσσερις συνεχόμενες ημέρες στη διάρκεια της εβδομάδας και μετά παίρνει ρεπό.
Συνολικά στο εργοστάσιο απασχολούνται 60 υπάλληλοι .Να διατυπωθεί το π.γ.π που ελαχιστοποιεί το συνολικό αριθμό υπαλλήλων που απασχολεί εβδομαδιαίως στο εργοστάσιο.

5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\max -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1+2x_2 \geq 4$$
$$2x_1-2x_2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Να βρείτε γραφικά τον χώρο των εφικτών λύσεων και τις κορυφές του, σχεδιάζοντας τις ευθείες των περιορισμών.
2. Να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο το **πολύ δυο** από τις κορυφές του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος, διατυπώνοντας με προσοχή την διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Να πάρετε τις προβολές των κορυφών αυτών στο επίπεδο x_1, x_2 (θα ταυτισθούν με κάποια από τα σημεία που έχετε βρει στο ερώτημα 1). Να εντοπίσετε τα ζεύγη των ευθειών των περιορισμών, που σαν τομές τους προκύπτουν οι προβολές, στο επίπεδο x_1, x_2, των κορυφών που έχετε βρει. Αν στην προσπάθειά σας να βρείτε τις δυο κορυφές με αλγεβρικό τρόπο βρείτε κάποια λύση που δεν είναι βασική εφικτή, για αυτή τη λύση πάρετε την προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 και στην συνέχεια προσπαθήστε να εντοπίσετε τις δυο ευθείες που ορίζουν αυτό το σημείο ως τομή. Που περιμένετε να τέμνονται αυτές οι ευθείες; Μέσα στο χώρο των εφικτών λύσεων ή έξω από αυτόν; Αντίστροφα από την γραφική παράσταση που θα κάνετε στο ερώτημα 1, να εντοπίσετε δυο ευθείες περιορισμών που τέμνονται σε σημείο έξω από τον χώρο των εφικτών λύσεων. Μετά προσπαθήστε να βρείτε την βασική λύση που η προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο. Ελέγξτε τις συντεταγμένες αυτής της βασική λύσης. Θα διαπιστώσετε ότι αυτή η λύση δεν είναι εφικτή. Συσχετίστε την θέση της προβολής, με το γεγονός ότι η λύση δεν είναι εφικτή.
3. Να βρείτε γραφικά τη λύση μεγίστου καθώς και το μέγιστο που ζητείται. Δικαιολογείστε με προσοχή την πορεία με αναφορά στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο στο οποίο κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο.
4. Ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου στη βέλτιστη λύση. Ποιοι περιορισμοί είναι ενεργοί και ποιοι όχι στη βέλτιστη λύση.
5. Ποια είναι η λύση και η τιμή της Α.Σ. αν στον περιορισμό (3) τεθεί 6 αντί 3. (Η απάντηση να δοθεί με γραφική επίλυση)
6. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στη ερώτηση (5) να βρεθεί, πάλι γραφικά, η αύξηση της Α.Σ. αν το 3 αντικατασταθεί με το 4, 5, 6. Μπορεί βασιζόμενοι μόνο στην απάντηση σε αυτό το ερώτημα να συμπεράνετε αναλογική αύξηση της τιμής της Α.Σ. σε αυξήσεις του συντελεστή b_3; (Αυτή η αύξηση της Α.Σ. όταν αυξάνεται κατά μία μονάδα ο πόρος b_3 λέγεται δυϊκή τιμή (Dual price) του πόρου 3)

Μάθημα 10ο

29/05/17

ΑΣΚΗΣΗ 1

X_B = αριθμός φορτηγών που θα αγοραστούν

X_L = αριθμός φορτηγών που θα ενοικιαστούν

m_1 ποσό που θα δανειστεί η εταιρεία στην αρχή της 1ης χρονιάς.

m_2 ποσό που θα δανειστεί στην αρχή της 2ης χρονιάς

$$\min\ 140X_B + 160X_L + 0.16m_1 + 0.16m_2$$

$$\begin{cases} X_B + X_L = 200 \\ 140X_B + 80X_L \leq 8000 + m_1 \\ m_1 \leq 20.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 + 0.16m_1 \leq 24.000 \\ 80X_L \leq 24.000 + m_2 - (m_1 + 0.16m_1) \\ m_2 \leq 20.000 \\ m_2 + 0.16m_2 \leq 24.000 + 24.000 - (m_1 + 0.16m_1) - 80X_L \end{cases} , \quad X_B, X_L, m_1, m_2 \geq 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (είχε μπει)

X_1 ποσότητα θειικού άλατος (βαρέλια)

X_2 ποσότητα νιτρικού άλατος (βαρέλια)

$\min 3X_1 + 3X_2$

$4 - (3X_1 + 5X_2) \leq 1$ (Pb μόλυβδος)

$5.2 - (2X_1 + 12.5X_2) \leq 0.2$ (Hg υδράργυρος)

$7.3 - (20X_1 + 3X_2) \leq 1.3$ (Mn μαγγάνιο)

$X_1, X_2 \geq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 3

	Αριθμός ρολών			Υπόλοιπο
A/a	1.5	2.5	3.5	
1	6	0	0	1
2	5	1	0	0
3	4	0	1	0.5
4	3	2	0	0.5
5	2	0	2	0
6	2	1	1	1
7	1	2	1	0
8	1	3	0	1
9	0	4	0	0
10	0	1	2	0.5

X_i αριθμός ρολών που κόβονται με τον i τρόπο, $i = 1, \dots, 10$.

$\min X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

$\min 1X_1 + 0.5X_3 + 0.5X_4 + X_6 + X_8 + 0.5X_{10}$

$6X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 + X_7 + X_8 \geq 1000$

$X_2 + 2X_4 + X_6 + 2X_7 + 3X_8 + 4X_9 + X_{10} \geq 2000$

$X_3 + 2X_5 + X_6 + X_7 + X_{10} \geq 4000$

$X_i \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

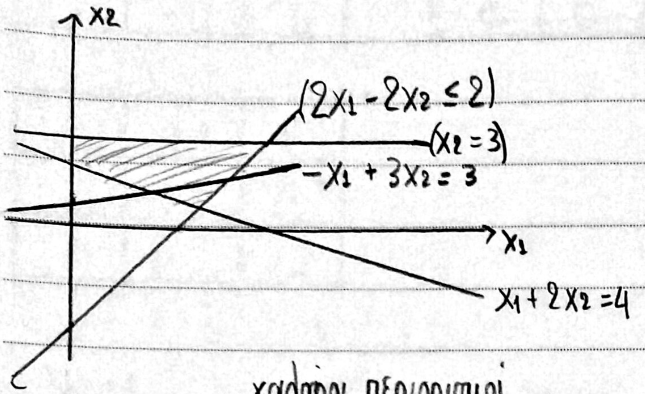
X_{ij} : ο αριθμός των υπαλλήλων που ξεκινά εργασία την ημέρα i στην βάρδια j.

$i = Δ(1), Τ(2), Τ(3), Π(4), Π(5), Σ(6), Κ(7)$. , $j = Ν, Π, Α$

$\min \sum\sum x_{ij}$

$X_{5N} + X_{6N} + X_{7N} + X_{1N} \geq 5$ (

ΑΣΚΗΣΗ 5



$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 9$

χαλαροί περιορισμοί

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 \quad + x_4 &= 2 \\ x_2 \quad + x_5 &= 3 \\ x_i &\geq 0. \end{aligned}$$

$x_1 = 0$, $x_5 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 6$, $x_2 = 3$

$x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $x_4 = 6$, $x_5 = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2 (8η διάλεξη).

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μέθοδος Μ ή μέθοδος 2 φάσεων.
Προσθέτω τις μεταβλητές 7, 8, 9 (3 μεταβλητές)
σταματάμε όταν όλα ≥ 0.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Περισσότερα μηδενικά ⇒ εναλλακτική λύση
P_1 δεν είναι στην βάση

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$(P_1, P_5, P_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.3 \\ -0.5 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

			10	4	−3	0	0	0	−M
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	10	17.5	1	0	−0.1	0.5	0	0.3	−0.3
P_5	0	2.5	0	0	0.3	−0.5	1	0.1	−0.1
P_2	4	10	0	1	0.4	0	0	−0.2	0.02
		215	0	0	3.6	5	0	2.2	−2.2+M

$$\begin{pmatrix} 10+\Delta c_1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} - (-3) \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10+\Delta c_1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(10+\Delta c_1)(-0.1) + 0 + 4 \cdot 0.4 - (-3) \geq 0$

$(10+\Delta c_1)\, 0.5 + (-0.5) \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 0 \geq 0$

$(10+\Delta c_1)\, 0.3 + (0.1 \cdot 0) + (-0.2) \cdot 4 \geq 0.$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.3 \\ -0.5 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65+\Delta c_1 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}\underset{\sim}{\hat{b}} = B^{-1}(\underset{\sim}{b} + \Delta b \underset{\sim}{e_k})$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$\underset{\sim}{P_1}, \underset{\sim}{P_2}, \ldots, \underset{\sim}{P_m}$

$\underset{\sim}{X_0} = (x_1, \ldots, x_m)'$

$x_1 \underset{\sim}{P_1} + x_2 \underset{\sim}{P_2} + \cdots + x_m \underset{\sim}{P_m} = \underset{\sim}{b}$

$P_{m+1}, \quad z_{m+1} - c_{m+1} \leq 0$

$\underset{\sim}{P}_{m+1} = X_{m+1,1} \underset{\sim}{P}_1 + \cdots + X_{m+1,m} \underset{\sim}{P}_m$

$\underset{\sim}{P}_1 = \dfrac{1}{X_{m+1,1}} \underset{\sim}{P}_{m+1} - \dfrac{X_{m+1,2}}{X_{m+1,1}} \underset{\sim}{P}_2, \ldots, - \dfrac{X_{m+1,m}}{X_{m+1,1}} P_n$

$Z_1 = \dfrac{C_{m+1}}{X_{m+1,1}} - C_2 \dfrac{X_{m+1,2}}{X_{m+1}} - \cdots - C_n \dfrac{X_{m+1,m}}{X_{m+1,1}}$

$= \dfrac{1}{X_{m+1,1}} \left(C_{m+1} - (Z_{m+1} - X_{m+1,} C_1) \right)$

$= \dfrac{1}{X_{m+1,1}} (Z_{m+1} - Z_{m+1}) + C_1$

$\Rightarrow Z_1 - C_1 = - \dfrac{Z_{m+1} - C_{m+1}}{X_{m+1,1}} > 0.$

ΑΣΚΗΣΗ

$\max 140x_1 + 300x_2 + 400x_3$

$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 400$

$x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 200$

$x_1 + x_3 \leq 300$

$x_i \geq 0$

Τελικό tableu:	B	C_B	b	P_1 (140)	P_2 (300)	P_3 (400)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (−M)
	P_2	300	40	0.2	1	0	−0.067	0	0.133
	P_3	400	40	0.2	0	1	0.267	0	−0.033
	P_5	0	260	0.8	0	0	−0.267	1	0.033
			28.000	0	0	0	86.667	0	26.667+M

Δυϊκό: $\min 400w_1 + 200w_2 + 300w_3$

$2w_1 + w_2 + w_3 \geq 140$

$8w_1 + w_2 \geq 300$

$2w_1 + 4w_2 + w_3 \geq 400$

$w_1 \in \mathbb{R},\ w_2, w_3 \geq 0$

$w_1 = 26.667 + M + (-M) = 26.667$

$w_2 = 86.667$

$w_3 = 0$, $u = 28.000$

β) $x_1 = 0$ Ποιά η λύση του δυϊκού;

$x_2 = 40$

$x_3 = 40$

$w_3 = 0 \rightarrow$ επειδή ο 1ος περιορισμός ισότητα

$9w_1 + w_2 = 300$

$2w_1 + w_2 = 400$

Πρωτεύον: $\max 140x_1 + 300x_2 + 400x_3$

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 400$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \le 200$$
$$x_1 + x_3 \le 300$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

προϊόν 1, προϊόν 2, υπερωρίες αποστολ., διαφ. 1, διαφ. 2

$\max 15P_1 + 8P_2 - 6(ot) - 1.5(rm) - a_1 - a_2$

$P_1 - 10a_1 \le 50$ (ζήτηση προϊόν 1)

$P_2 - 15a_2 \le 60$ (-"- προϊόν 2)

$0.75P_1 + 0.5P_2 - ot \le 160$ (χρόνος εργασίας)

$2P_1 + P_2 - rm \le 0$ (πρώτη ύλη)

$rm \le 400$ (διαθεσιμότητα πρώτης ύλης)

$a_1 + a_2 \le 100$ (διαφήμιση)

$1.5P_1 + 0.8P_2 \le 320$ (χρόνος μηχανής)

$P_1, P_2, a_1, a_2, ot, rm \geq 0$

με Simplex ή LINDO

1) όχι

2) όχι δεν θα άλλαζε

3) θα άλλαζε

4)

5) 4.5 μονάδες, 0

6) $(B^{-1}\underline{b})$ - το χρησιμοποιώ (Δυϊκό)

7)

1) Προβλήματα μεταφοράς

u \ v	22 B_1	24 B_2	23 B_3	
0 A_1	-1 0 23	2 24 +	3 23 −	5
1 A_2	7 23	1 25 −	0 0 + 24	8
0 A_3	-2 0 24	-1 0 25	7 23	7
-1 A_4	-4 0 25	6 23	-3 0 25	6
-17 A_5	1 5	-8 0 15	-14 0 20	1
	8	9	10	

Μέθοδος ελαχίστου στοιχείου

$m+n-1=7$

με εκφυλισμένη

$u_i+v_j=c_{ij}$ (βασικά τετράγωνα)

$\delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ (μη βασικά τετράγωνα)

2)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	40	60	35
A_2	48	30	75	60
A_3	55	62	18	40
A_4	0	0	0	0

-48	-20	0	-25
-27	-45	0	-15
~~-7~~	~~0~~	~~-44~~	~~-22~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

-33	-5	0*	-10
-12	-30	0	0*
-7	0*	-59	-22
0*	0	-15	0